Dr. P. Thurnheer ETH Zürich Frühling 2005

2. Vordiplom
Mathematik: Analysis
(D-ERDW)

Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen in den 90 Minuten, welche für diesen Prüfungsteil vorgesehen sind.

1. (11 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \left(x^2 - 1\right) \ln y.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle kritischen Punkte von f.

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $\mathrm{D}^2 f$ in den kritischen Punkten und geben Sie deren Eigenwerte an. Welcher Art sind die kritischen Punkte?

c) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f im Punkte $P(2, 1)$ minimal? We gross ist dieses Minimum? Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in $P(2, 1)$ in Richtung $(1, 1)$.

2. (5 Punkte)
Mit den Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln(y/x) \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} \ln u - v \\ ue^v \end{pmatrix}$$

setzt man $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$h(x, y) = g(f(x, y)).$$

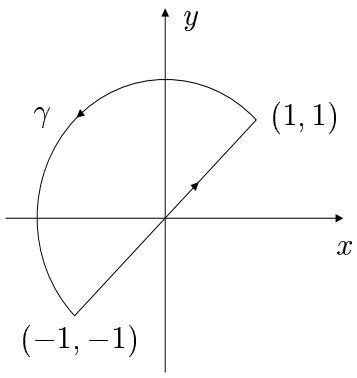
Bestimmen Sie die Ableitung von h direkt und mit der Kettenregel.

Bitte wenden!

3. (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 y \\ -x^4 \end{pmatrix}$$

längs des Weges γ.



Hinweis. Bestimmen Sie die Ableitung von $\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$.

4. (5 Punkte)
Skizzieren Sie den Bereich $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ und berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B \left(x^2 + \frac{1}{(y+2)^2} \right) dx\, dy\,.$$

5. (8 Punkte)
Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z \end{pmatrix}$$

und das Dreieck D mit den Ecken $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$.

a) Ist das Vektorfeld F wirbelfrei? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie die Arbeit von F längs des Randes von D (von A über B und C nach A).

b) Bestimmen Sie den Fluss von F sowohl durch das Dreieck D als auch durch das Tetraeder mit Grundfläche D und Spitze $(0,1,0)$.